Analiza zespolona
Lista 4

Zad 1. Wykazać, że dla dowolnych $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

a) $e^z \neq 0$,

b) $e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 = z_2 + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$,

c) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

Zad 2. Narysować obraz zbioru $\{z \in \mathbb{C} : 0 < Imz < \pi \wedge Rez < 0\}$ przy odwzorowaniu $f(z) = e^z$.

Zad 3. Wykazać, że

a) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \qquad \mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1$

b) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$,

$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$,

c) $\sin iz = i\mathrm{sh}z, \qquad \cos iz = \mathrm{ch}z$.

Na podstawie a), b), c) wyznaczyć $|\cos z|$, $|\sin z|$.

Zad 4. Wyznaczyć miejsca zerowe funkcji $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{sh}z$, $\mathrm{ch}z$.

Zad 5. Dla jakich $c \in \mathbb{C}$ funkcje

$$f_1(z) = \begin{cases} \frac{Rez}{z}, & z \neq 0 \\ c, & z = 0 \end{cases}, \qquad f_2(z) = \begin{cases} \frac{Imz^2}{z^2} & z \neq 0 \\ c, & z = 0 \end{cases}$$

są ciągłe w zerze.

Zad 6. Wyznaczyć z definicji pochodną funkcji $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, oraz $f(z) = \frac{1}{z}$.

Zad 7. Zbadać różniczkowalność w sensie zespolonym funkcji $\overline{z}$, $|z|$, $|z|^2$.

Zad 8. Wykazać, że jeśli funkcja f i funkcja do niej sprzężona $\overline{f}$ są różniczkowalne w sensie zespolonym w punkcie $z_0 \in \mathbb{C}$, to $f'(z_0) = 0$.

Zad 9. Wykazać, że jeśli funkcja holomorficzna przyjmuje tylko wartości rzeczywiste, to jest stała.